CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 1, No 2, 2020
DOI:
10.25037/cgantjma.v1i2.40

Journal of
MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

Analisis *Locating Dominating Set* pada Graf Khusus dan Hasil Operasi Comb Sisi

Imro'atun Rofikah[2], Ika Hesti Agustin[1,2], Dafik[1,3],
[1]CGANT - Universitas Jember
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
[3]Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
ikahesti.fmipa@unej.ac.id

Abstract

Assume that $G = (V, E)$ is an undirected and connected graph with vertex set V and edge set E. D is called a dominating set of the vertex in G such that for each vertex $v \in V$ one of: $v \in D$ or a neighbor u of v in D with $u \in D$. While locating dominating set of G is a dominating set D of G when satisfy this condition: for every two vertices $u, v \in (V - D), N(u) \cap DN(v) \cap D$. The minimum cardinality of a locating dominating set of G is the location domination number $\gamma_L(G)$. In this paper, locating dominating set and location domination number of special graph and edge comb product operation result will be determined. Location domination number theorem on triangular book graph Bt_n and edge comb product operation result that is $C_m \trianglerighteq Bt_n$ and $S_m \trianglerighteq Bt_n$ are the results from this experiment.

Keywords : locating dominating set, location domination number.
Mathematics Subject Classification: 05C69

Pendahuluan

Graf G merupakan sekumpulan titik di bidang dua dimensi yang dihubungkan oleh sekumpulan sisi. Dengan kata lain graf G merupakan pasangan terurut himpunan (V, E), dimana V adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut dengan titik (vertex), sedangkan E adalah himpunan boleh kosong dari pasangan tidak terurut dua titik $v_1, v_2 \in V(G)$ yang disebut sisi (edge) [10]. Banyaknya titik pada suatu graf G disebut order yang dinotasikan dengan p atau $|V(G)|$, sedangkan banyaknya sisi pada suatu graf G disebut size yang dinotasikan dengan q atau $|E(G)|$ [8].

Dua buah titik v_1, v_2 dari graf G dikatakan bertetangga (adjacent) apabila terdapat sebuah sisi $e = v_1v_2$ yang menghubungkan kedua titik tersebut. Untuk sebarang sisi $e = (v_1, v_2)$ dikatakan e bersisian (incident) dengan titik v_1, jika v_1 merupakan titik ujung dari e atau e bersisian dengan titik v_2, jika v_2 merupakan titik ujung dari e. Teori yang dikembangkan dalam teori graf diantaranya adalah *teori dominating set* dan perluasan dari teori dominating set yaitu teori *locating dominating set*. Penerapan teori locating dominating set dimulai pada tahun 1980 oleh Slater [10] dengan membuat sebuah kode lokasi perlindungan untuk beberapa fasilitas dengan menggunakan jaringan detektor. Berikut ini adalah definisi terkait dominating set dan locating dominating set.

Definisi 1. Diberikan sebuah graf terhubung $G = (V, E), D \subset V$ merupakan dominating set dari titik di G sedemikian sehingga untuk semua titik $v \in V$ salah satu dari: $v \in D$ atau sebuah tetangga u dari v ada di D dimana $u \in D$ [7].

Definisi 2. Diberikan sebuah graf terhubung $G = (V, E)$, locating dominating set pada G adalah dominating set D pada G dengan syarat setiap dua titik berbeda u dan v dimana

$u, v \in (V - D)$ berlaku $N(u) \cap DN(v) \cap D$ [10]. Terdapat beberapa jenis graf khusus, diantaranya adalah sebagai berikut:

Graf Buku Segitiga (Triangular Book Graph) yang dinotasikan dengan Bt_n merupakan graf terhubung dengan himpunan titik $V(Bt_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Bt_n) = \{x_1x_2\} \cup \{x_1y_j, x_2y_j; 1 \leq j \leq n\}$ sehingga $|V(Bt_n)| = n + 2$ dan $|E(Bt_n)| = 2n + 1$ dengan $n \geq 2$ [4].

Graf Siklus (Cycle Graph) yang dinotasikan dengan Cn merupakan graf yang setiap titiknya berderajat dua dan banyaknya sisi sama dengan banyaknya titik yang dimiliki. Graf Siklus C_n hanya dapat dibentuk dengan $n \geq 3$ [1].

Graf Bintang (Star Graph) yang dinotasikan dengan S_n adalah graf yang terdiri dari satu titik pusat yang mempunyai derajat n, $n + 1$ titik dan n sisi. Himpunan titik dan himpunan sisi pada graf bintang yaitu $V(Sn) = \{A\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(S_n) = \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\}$ dengan $n \geq 3$ [9].

Operasi graf yang digunakan pada penelitian ini adalah operasi comb sisi, berikut ini definisi terkait operasi comb sisi.

Definisi 3. Misalkan G dan H adalah graf terhubung dan $e \in E(H)$. Operasi comb sisi dari graf G dan H yang dinotasikan dengan $G \trianglerighteq H$ merupakan operasi graf dengan mengambil satu salinan graf G dan $|E(G)|$ salinan graf H, kemudian merekatkan salinan ke-i dari graf H di sisi cangkok e pada sisi ke-i dari graf G. Misal graf G dengan titik sebanyak $|V(G)| = p_1$ dan sisi sebanyak $|E(G)| = q_1$, serta graf H dengan titik sebanyak $|V(H)| = p_2$ dan sisi sebanyak $|E(H)| = q_2$. Maka banyaknya titik dan sisi pada graf $G \trianglerighteq H$ adalah $|V(G \trianglerighteq H)| = q_1(p_2 2) + p_1$ dan $|(G \trianglerighteq H)| = q_1q_2$ [3].

Pada penelitian ini penulis akan menentukan *locating dominating set* dan *location domination number* pada graf khusus dan hasil operasi comb sisi. Penelitian ini menghasilkan teorema terkait location domination number pada graf buku segitiga Bt_n dan hasil operasi comb sisi yaitu $C_m \trianglerighteq Bt_n$ dan $S_m \trianglerighteq Bt_n$. Peneletian ini diawali dengan menentukan graf khusus yang akan digunakan. Kemudian menerapkan operasi comb sisi pada graf khusus yang telah ditentukan. Selanjutnya menentukan himpunan titik dan himpunan sisi pada graf hasil operasi comb sisi. Setelah itu graf khusus dan graf hasil operasi comb sisi dianalisis locating dominating set-nya, sehingga diperoleh location domination number $\gamma_L(G)$. Kemudian dianalisis apakah location domination number $\gamma_L(G)$ minimum, apabila $\gamma_L(G)$ sudah minimum maka dihasilkan teorema tentang *location domination number* $\gamma_L(G)$, sedangkan jika $\gamma_L(G)$ belum minimum maka dianalisis kembali *locating dominating set*-nya.

Penelitian sebelumnya mengenai locating dominating set telah banyak dilakukan, seperti Argiroffo [2] dengan judul a polyhedral approach to locating dominating sets in graph, Foucaud [6] pada salah satu artikelnya yaitu *locating dominating set in twin free graph* dan Desvandai [5] yang menganalisis himpunan dominasi lokasi pada graf kipas, graf helm, graf parasut, graf roda dan graf lintasan dengan beberapa operasi graf yaitu joint, crown product, amalgamasi, *shackle* dan power graf. Pada penelitian ini, penulis akan menganalisis *locating dominating set* pada graf buku segitiga Bt_n dan hasil operasi comb sisi yaitu $C_m \trianglerighteq Bt_n$ dan $S_m \trianglerighteq Bt_n$.

Hasil Penelitian

Penelitian ini menghasilkan teorema terkait location domination number pada graf buku segitiga Bt_n dan hasil operasi comb sisi yaitu $C_m \trianglerighteq Bt_n$ dan $S_m \trianglerighteq Bt_n$, selain itu penelitian

juga mengasilkan satu observasi yaitu graf $S_m \trianglerighteq Bt_n$.

Teorema yang pertama adalah *location domination number* pada graf buku segitiga Bt_n. Teoremanya adalah sebagai berikut:

Teorema 1. *Misal G adalah graf khusus berupa graf buku segitiga Bt_n untuk $n \geq 2$, maka location domination number pada graf G adalah $\gamma_L(Bt_n) = n$.*

Bukti. Graf buku segitiga Bt_n merupakan graf terhubung dengan himpunan titik $V(Bt_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Bt_n) = \{x_1x_2\} \cup \{x_1y_j, x_2y_j; 1 \leq j \leq n\}$ sehingga diperoleh $|V(Bt_n)| = n + 2$ dan $|E(Bt_n)| = 2n + 1$.

Akan ditunjukkan bahwa $\gamma_L(Bt_n) \geq n$ dengan memisalkan $\gamma_L(Bt_n) < n$. Diambil locating dominating set pada Bt_n yaitu $D = \{y_j; 1 \leq j \leq n - 1\}$ sehingga $|D| = n - 1$. Sedangkan himpunan titik selain locating dominating set pada Bt_n yaitu $V - D = \{xi; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{y_n\}$. Berikut ini adalah irisan antara himpunan titik tetangga dari $\forall v \in (V - D)$ dengan D.

$$N(x_1) \cap D = \{y_j; 1 \leq j \leq n - 1\}$$
$$N(x_2) \cap D = \{y_j; 1 \leq j \leq n - 1\}$$
$$N(y_n) \cap D = \emptyset$$

Pada $y_n \in (V - D)$ terlihat bahwa $N(y_n) \cap D = \emptyset$, berarti D bukan merupakan dominating set pada Bt_n. Selain itu pada $x_1, x_2 \in (V - D)$ terlihat bahwa $N(x_1) \cap D = N(x_2) \cap D$, berarti D tidak memenuhi syarat *locating dominating set*. Sehingga dapat disimpulkan bahwa dengan memisalkan $\gamma_L(Bt_n) < n$ tidak memenuhi Definisi 2, sehingga terjadi kontradiksi bahwa D merupakan *locating dominating set*. Oleh karena itu *location domination number* pada graf buku segitiga Bt_n adalah $\gamma_L(Bt_n) \geq n$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\gamma_L(Bt_n) \leq n$ dengan memilih *locating dominating set* pada Bt_n yaitu $D = \{x_1\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n - 1\}$ sehingga $|D| = n$. Sedangkan himpunan titik selain *locating dominating set* pada Bt_n yaitu $VD = \{x_2\} \cup \{yn\}$. Berikut ini adalah irisan antara himpunan titik tetangga dari $\forall v \in (V - D)$ dengan D.

$$N(x_2) \cap D = \{x_1\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n - 1\}$$
$$N(y_n) \cap D = \{x_1\}$$

Pada $x_2, y_n \in (VD)$ terlihat bahwa $N(x_2) \cap D \neq \emptyset, N(y_n) \cap D \neq \emptyset$ dan $N(x_2) \cap D \neq N(y_n) \cap D$, berarti D merupakan *locating dominating set* pada Bt_n karena D memenuhi Definisi 2, sehingga diperoleh $\gamma_L(Bt_n) \leq n$. Karena $\gamma_L(Bt_n) \geq n$ dan $\gamma_L(Bt_n) \leq n$, maka $\gamma_L(Bt_n) = n$. □

Teorema yang kedua adalah *location domination number* pada graf hasil operasi comb sisi dari graf cycle C_m dan buku segitiga Bt_n. Teoremanya adalah sebagai berikut:

Teorema 2. *Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf cycle C_m dan buku segitiga Bt_n dengan sisi x_1x_2 sebagai sisi cangkok di graf Bt_n untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, maka location domination number pada graf G adalah $\gamma_L(Cm \trianglerighteq Bt_n) = mn - 1$.*

Bukti. Graf $C_m \trianglerighteq Bt_n$ adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(C_m \trianglerighteq Bt_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_i, j; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(C_m \trianglerighteq Bt_n) = \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{x_1x_m\} \cup \{x_iy_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i+1}y_{i,j}; 1 \leq i \leq$

$m-1, 1 \leq j \leq n\}$ sehingga diperoleh $|V(C_m \trianglerighteq Bt_n)| = mn + m$ dan $|E(C_m \trianglerighteq Bt_n)| = 2mn + m$.

Akan ditunjukkan bahwa $\gamma_L(C_m \trianglerighteq Bt_n) \geq mn - 1$ dengan memisalkan $\gamma_L(C_m \trianglerighteq Bt_n) < mn - 1$. Diambil *locating dominating set* pada $C_m \trianglerighteq Bt_n$ yaitu $D = \{x_i; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-2\} \cup \{y_{i,n-1}; 1 \leq i \leq m-1\}$ sehingga $|D| = mn - 2$. Sedangkan himpunan titik selain *locating dominating set* pada $C_m \trianglerighteq Bt_n$ yaitu $V - D = \{x_m\} \cup \{y_{m,n-1}\} \cup \{y_{i,n}; 1 \leq i \leq m\}$. Berikut ini adalah irisan antara himpunan titik tetangga dari $\forall v \in (V - D)$ dengan D.

$$N(x_m) \cap D = \{x_1, x_{m-1}\} \cup \{y_{m-1,j}; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{y_{m,j}; 1 \leq j \leq n-2\}$$

$$N(y_{i,n}) \cap D = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq m-2\}$$

$$N(y_{m-1,n}) \cap D = \{x_{m-1}\}$$

$$N(ym, n-1) \cap D = \{x_1\}$$

$$N(y_{m,n}) \cap D = \{x_1\}$$

Pada $y_{m,n-1}, y_{m,n} \in (V - D)$ terlihat bahwa $N(y_{m,n-1}) \cap D = N(y_{m,n}) \cap D$, berarti D tidak memenuhi syarat *locating dominating set*. Sehingga dapat disimpulkan bahwa dengan memisalkan $\gamma_L(C_m \trianglerighteq Bt_n) < mn - 1$ tidak memenuhi Definisi 2, sehingga terjadi kontradiksi bahwa D merupakan *locating dominating set*. Oleh karena itu location domination number pada graf $C_m \trianglerighteq Bt_n$ adalah $\gamma_L(C_m \trianglerighteq Bt_n) \geq mn - 1$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\gamma_L(C_m \trianglerighteq Bt_n) \leq mn - 1$ dengan memilih *locating dominating set* pada $C_m \trianglerighteq Bt_n$ yaitu $D = \{x_i; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}$ sehingga $|D| = mn - 1$. Sedangkan himpunan titik selain locating dominating set pada $C_m \trianglerighteq Bt_n$ yaitu $VD = \{x_m\} \cup \{y_{i,n}; 1 \leq i \leq m\}$. Berikut ini adalah irisan antara himpunan titik tetangga dari $\forall v \in (V - D)$ dengan D.

$$N(x_m) \cap D = \{x_1, x_{m-1}\} \cup \{y_{m-1,j}, y_{m,j}; 1 \leq j \leq n-1\}$$

$$N(y_{i,n}) \cap D = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq m-2\}$$

$$N(y_{m-1,n}) \cap D = \{x_{m-1}\}$$

$$N(y_{m,n}) \cap D = \{x_1\}$$

Pada $x_m, y_{i,n}, y_{m-1,n}, y_{m,n} \in (V - D)$ terlihat bahwa $N(x_m) \cap D \neq \emptyset, N(y_{i,n}) \cap D \neq \emptyset, N(y_{m-1,n}) \cap D \neq \emptyset, N(y_{m,n}) \cap D \neq \emptyset$ dan $N(x_m) \cap D \neq N(y_{i,n}) \cap D \neq N(y_{m-1,n}) \cap D \neq N(y_{m,n}) \cap D$, berarti D merupakan *locating dominating set* pada $C_m \trianglerighteq Bt_n$ karena D memenuhi Definisi 2, sehingga diperoleh $\gamma_L(C_m \trianglerighteq Bt_n) \leq mn - 1$. Karena $\gamma_L(C_m \trianglerighteq Bt_n) \geq mn - 1$ dan $\gamma_L(C_m \trianglerighteq Bt_n) \leq mn - 1$, maka $\gamma_L(C_m \trianglerighteq Bt_n) = mn - 1$. □

Teorema yang ketiga adalah location domination number pada graf hasil operasi comb sisi dari graf bintang S_m dan buku segitiga Bt_n. Sebelum disajikan teorema, terlebih dahulu disajikan observasi dari graf $S_m \trianglerighteq Bt_n$ sebagai berikut:

Observasi 1. Misal diketahui graf bintang S_m dengan $V(S_m) = \{A\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq m\}$ dan $E(S_m) = \{Ax_i; 1 \leq i \leq m\}$ serta graf buku segitiga Bt_n dengan $V(Bt_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(Bt_n) = \{x_1x_2\} \cup \{x_1y_j, x_2y_j; 1 \leq j \leq n\}$. Operasi comb sisi dari S_m dan Bt_n yang dinotasikan dengan $S_m \trianglerighteq Bt_n$ dengan sisi x_1x_2

sebagai sisi cangkok di graf Bt_n untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(S_m \trianglerighteq Bt_n) = \{A\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, $E(S_m \trianglerighteq Bt_n) = \{Ax_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{Ay_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. Sehingga diperoleh $|V(S_m \trianglerighteq Bt_n)| = mn + m + 1$ dan $|E(S_m \trianglerighteq Bt_n)| = 2mn + m$.

Bukti. Menurut Definisi 3 misal G dan H adalah graf ter-hubung dan $e \in E(H)$, maka operasi comb sisi adalah operasi graf dengan mengambil satu salinan graf G dan $|E(G)|$ salinan graf H, kemudian merekatkan salinan ke-i dari graf H di sisi cangkok e pada sisi ke-i dari graf G. Misal graf G dengan titik sebanyak $|V(G)| = p_1$ dan sisi sebanyak $|E(G)| = q_1$, serta graf H dengan titik sebanyak $|V(H)| = p_2$ dan sisi sebanyak $|E(H)| = q_2$. Sehingga banyaknya titik dan sisi pada graf $G \trianglerighteq H$ adalah $|V(G \trianglerighteq H)| = q_1(p_2 - 2) + p_1$ dan $|(G \trianglerighteq H)| = q_1 q_2$, maka graf $S_m \trianglerighteq Bt_n$ dengan sisi $x_1 x_2$ sebagai sisi cangkok di graf Bt_n mempunyai himpunan titik $V(S_m \trianglerighteq Bt_n) = \{A\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(S_m \trianglerighteq Bt_n) = \{Ax_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{Ay_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq jn\} \cup \{x_i y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}, sehinggadiperoleh$—V($S_m \trianglerighteq Bt_n$))$| = mn + m + 1$ dan $|E(S_m \trianglerighteq Bt_n)| = 2mn + m$.

Dari Observasi 1, selanjutnya disajikan teorema location domination number pada graf $S_m \trianglerighteq Bt_n)$ sebagai berikut.

Teorema 3. *Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf bintang Sm dan buku segitiga Bt_n dengan sisi $x_1 x_2$ sebagai sisi cangkok di graf Bt_n untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$, maka location domination number pada graf G adalah $\gamma_L(S_m \trianglerighteq Bt_n) = mn$.*

Bukti. Graf $(S_m \trianglerighteq Bt_n)$ adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(S_m \trianglerighteq Bt_n) = \{A\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(S_m \trianglerighteq Bt_n) = \{Ax_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{Ay_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ sehingga diperoleh $|V(S_m \trianglerighteq Bt_n)| = mn + m + 1$ dan $|E(S_m \trianglerighteq Bt_n)| = 2mn + m$.

Akan ditunjukkan bahwa $\gamma_L(S_m \trianglerighteq Bt_n) \geq mn$ dengan memisalkan $\gamma_L(S_m \trianglerighteq Bt_n) < mn$. Diambil *locating dominating set* pada $S_m \trianglerighteq Bt_n$ yaitu $D = \{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-2\} \cup \{y_{i,n-1}; 1 \leq i \leq m-1\}$ sehingga $|D| = mn - 1$. Sedangkan himpunan titik selain *locating dominating set* pada $S_m \trianglerighteq Bt_n$ yaitu $V - D = \{A\} \cup \{y_{m,n-1}\} \cup \{y_{i,n}; 1 \leq i \leq m\}$. Berikut ini adalah irisan antara himpunan titik tetangga dari $\forall v \in (V - D)$ dengan D.

$$N(A) \cap D = \{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_{i-1,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-2\} \cup \{y_{i,n-1}; 1 \leq i \leq m-1\}$$

$$N(y_{i,n}) \cap D = \{x_i; 1 \leq i \leq m-1\}$$

$$N(y_{m,n-1}) \cap D = \{x_m\}$$

$$N(y_{m,n}) \cap D = \{x_m\}$$

Pada $y_{m,n-1}, y_{m,n} \in (V - D)$ terlihat bahwa $N(y_{m,n-1}) \cap D = N(y_{m,n}) \cap D$, berarti D tidak memenuhi syarat *locating dominating set*. Sehingga dapat disimpulkan bahwa dengan memisalkan $\gamma_L(S_m \trianglerighteq Bt_n) < mn$ tidak memenuhi Definisi 2, sehingga terjadi kontradiksi. Oleh karena itu *location domination number* pada graf $S_m \trianglerighteq Bt_n$ adalah $\gamma_L(S_m \trianglerighteq Bt_n) \geq mn$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\gamma_L(S_m \trianglerighteq Bt_n) \leq mn$ dengan memilih *locating dominating set* pada $S_m \trianglerighteq Bt_n$ yaitu $D = \{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}$ sehingga $|D| = mn$. Sedangkan himpunan titik selain *locating dominating set*

pada $S_m \trianglerighteq Bt_n$ yaitu $V - D = \{A\} \cup \{y_{i,n}; 1 \leq i \leq m\}$. Berikut ini adalah irisan antara himpunan titik tetangga dari $\forall v \in (V - D)$ dengan D.

$$(A) \cap D = \{x_i, y_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1jn - 1\}$$

$$N(y_{i,n}) \cap D = \{x_i; 1 \leq i \leq m\}$$

Pada $A, y_{i,n} \in (V - D)$ terlihat bahwa $N(A) \cap D \neq \emptyset, N(yi, n) \cap D \neq \emptyset$ dan $N(A) \cap D \neq N(yi, n) \cap D$, berarti D merupakan locating dominating set pada $S_m \trianglerighteq Bt_n$ karena D memenuhi Definisi 2, sehingga diperoleh $\gamma_L(S_m \trianglerighteq Bt_n) \leq mn$. Karena $\gamma_L(S_m \trianglerighteq Bt_n) \geq mn$ dan $\gamma_L(S_m \trianglerighteq Bt_n) \leq mn$, maka $\gamma_L(S_m \trianglerighteq Bt_n) = mn$. □

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka diperoleh kesimpulan bahwa *location domination number* pada graf Bt_n, $C_m \trianglerighteq Bt_n$ dan $S_m \trianglerighteq Bt_n$ adalah sebagai berikut:

1. $\gamma_L(Bt_n) = n$, untuk $n \geq 2$.
2. $\gamma_L(C_m \trianglerighteq Bt_n) = mn - 1$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$.
3. $\gamma_L(S_m \trianglerighteq Bt_n) = mn$, untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 2$.

References

[1] Ardiyansah, R., dan Darmaji. 2013. Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf. Jurnal Sains dan Seni Pomits. 2(1): 2337-3520.

[2] Argiroffo, G. R., dan S.M. Bianchi. 2015. A Polyhedral Approach to Locating-Dominating Sets in Graphs. Electronic Notes in Discrete Mathematics. 50: 89-94.

[3] Dafik, A. I. Kristiana, A. C. Prihandoko, dan D. A. R. Wardani. 2016. On the Total r-Dynamic Coloring of Graph: a New Graph Coloring Study. Proceeding of International Conference on Mathematics: Education, Theory Application (ICMETA).

[4] Dafik, Slamin, F. R. Eka, dan L. Sya'diyah. 2013. Super Antimagicness of Triangular Book and Diamond Ladder Graphs. Proceeding of International Conference on Mathematics and Its Aplications (IICMA). 1-8.

[5] Desvandai, R. B. 2016. Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Model Topologi Graf Khusus dan Operasinya. Skripsi. Jember: Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

[6] Foucaud, F., dan M. A. Henning. 2016. Locating-Dominating Sets in Twin-Free Graphs. Journal of Discrete Applied Mathematics. 23(3): 1-18.

[7] Haynes, T. W., S. T. Hedetniemi, dan P. J. Slater. 1998. Fundamental of Domination in Graphs. New York: Marcel Dekker, Inc.

[8] Iswadi, H. 2011. Batas Atas Bilangan Dominasi Lokasi Metrik dari Graf Hasil Operasi Korona. University of Surabaya Repository. 1979-3960.

[9] Munir, R. 2009. Matematika Diskrit. Edisi ketiga. Bandung: Informatika Bandung.

[10] Slater, P. J. 1987. Domination and Location in Acyclic Graphs. John Wiley Sons, Inc. 17: 55-64.